HƯỚNG DẪN CHẤM THI ÔLYMPIC CỤM

Môn toán – Khối 10

Câu	Nội dung	Điểm
1a (2,0đ)	**Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x-y-xy=7 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ (I)	
	Đặt $t=-y$ thì hệ (I) trở thành $\begin{cases} x+t+xt=7 \\ (x+t)^2-2xt=10 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} x+t=S \\ xt=P \end{cases}$ với $S^2 \ge 4P$	0,5
	Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} S+P=7 \\ S^2-2P=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=7-S \\ \left[\begin{array}{l} S=-6 \\ S=4 \end{array}\right. \end{cases}$	0,5
	Với $S=-6 \Rightarrow P=13$ (loại). Với $S=4 \Rightarrow P=3$ (thỏa mãn)	0,5
	….Suy ra hệ có hai nghiệm là: $(1;-3)$; $(3;-1)$	0,5
1b (3,0đ)	**Giải phương trình:** $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$ (*)	
	Điều kiện: $-2 \le x \le 2$ $(*) \Leftrightarrow 4(2x+4)+16(2-x)+16\sqrt{2(4-x^2)}=9x^2+16$ $\Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}-x^2-8x=0$	1,0
	Đặt $t=\sqrt{2(4-x^2)}$, (với $t \ge 0$). Khi đó phương trình trở thành $4t^2+16t-x^2-8x=0$ (**) Ta có $\Delta'=(2x+8)^2 \Rightarrow$ Phương trình (**) có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} t=\frac{x}{2} \\ t=-\frac{x}{2}-4 \end{array}\right.$	1,0
	+ Với $t=\frac{x}{2}$ ta được $\sqrt{2(4-x^2)}=\frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 9x^2=32 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$	0,5
	+ Với $t=-\frac{x}{2}-4$ ta được $\sqrt{2(4-x^2)}=-\frac{x}{2}-4$ (vô nghiệm vì $\|x\| \le 2 \Rightarrow -\frac{x}{2}-4<0$) Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.	0,5
2a (2,0đ)	**Giải bất phương trình:** $\sqrt{(4+x)(6-x)} \le x^2-2x-4$ (1)	
	Đk: $-4 \le x \le 6$. $(1) \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x+24}-x^2+2x+4 \le 0$	0,5
	Đặt $t=\sqrt{-x^2+2x+24}$ (với $t \ge 0$)	0,5
	Bpt trở thành: $t^2+t-20 \le 0 \Leftrightarrow -5 \le t \le 4$ …. Kết hợp với đk ta có tập nghiệm là: $T=[-4;-2] \cup [4;6]$	1,0
2b (3,0đ)	**Tìm tập các giá trị của tham số m để mọi $x \in [-4;6]$ đều là nghiệm của bất phương trình** $\sqrt{(4+x)(6-x)} \le x^2-2x+m$ (1)	
	Đặt $t=\sqrt{-x^2+2x+24}$. Với $x \in [-4;6]$ thì $t \in [0;5]$	1,0
	Bất pt (1) trở thành: $t^2+t-24 \le m$ (2)	0,5
	Lập BBT của hàm $f(t)=t^2+t-24$ trên $[0;5]$	1,0
	Kết luận $m \ge 6$	0,5

3a (2,0đ)	**Cho ΔABC có $\begin{cases} \cos B\cos C=\dfrac{1}{4} \ (1) \\ a^2=\dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} \ (2) \end{cases}$. Chứng minh ΔABC đều.**	
	Ta có $(2)\Leftrightarrow a^2(b+c)=(b+c)(b^2-bc+c^2)\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-bc$ (3)	0,5
	Theo định lý cos ta có $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $\cos A=\dfrac{1}{2}$, mà $0<A<180^0 \Rightarrow A=60^0$ (*)	0,5
	Mặt khác $(1)\Leftrightarrow \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{4}$ (5) Thế (3) vào (5) ta được: $\dfrac{(2c^2-bc)(2b^2-bc)}{(b^2+c^2-bc)bc}=1\Leftrightarrow\dfrac{(2c-b)(2b-c)}{b^2+c^2-bc}=1$	0,5
	$\Leftrightarrow 5bc-2b^2-2c^2=b^2+c^2-bc\Leftrightarrow 3(b-c)^2=0\Leftrightarrow b=c$ (**) Từ (*) và (**) suy ra ΔABC đều (đpcm)	0,5
3b (3,0đ)	**Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1: 3x+y+5=0$; $d_2: x-3y+5=0$ và điểm $I(1;-2)$. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm I và cắt d_1, d_2 lần lượt tại B và C sao cho biểu thức $P=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.**	
	Ta có $\overrightarrow{n_1}=(3;1)$ là 1 VTPT của d_1; $\overrightarrow{n_2}=(1;-3)$ là 1 VTPT của d_2	0,5
	Mặt khác $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Rightarrow d_1\perp d_2$	0,5
	Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $d \Rightarrow P=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{AH^2}$	0,5
	Do đó để P đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow AH$ đạt giá trị lớn nhất Mà $AH\le AI$. Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow H\equiv I$ tức là $d\perp AI$	0,5
	$d_1\cap d_2=A\Rightarrow A(-2;1)\Rightarrow \overrightarrow{AI}=(3;-3)\Rightarrow d: x-y-3=0$	1,0
4a (3,0đ)	**Một nhà hóa học dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất $140kg$ chất A và $9kg$ chất B. Từ một tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được $20kg$ chất A và $0,6kg$ chất B. Từ một tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được $10kg$ chất A và $1,5kg$ chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất, biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.**	
	Gọi x tấn nguyên liệu loại I, y tấn nguyên liệu loại II, $(x,y\ge 0)$ Khi đó tổng số tiền mua nguyên liệu là $f(x,y)=4x+3y$ (triệu)	0,5
	Khi đó số chất A có thể chiết xuất được là: $20x+10y$ (kg) số chất B có thể chiết xuất được là: $0,6x+1,5y$ (kg)	0,5
	Theo giả thiết ta có hệ: $\begin{cases} 0\le x\le 10 \\ 0\le y\le 9 \\ 20x+10y\ge 140 \\ 0,6x+1,5y\ge 9 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 0\le x\le 10 \\ 0\le y\le 9 \\ 2x+y\ge 14 \\ 2x+5y\ge 30 \end{cases}$ (*)	0,5
	Trên mặt phẳng tọa độ Oxy vẽ miền D phần mặt phẳng chứa điểm $M(x;y)$ thỏa mãn (*)	0,5
	Khi đó $f(x,y)=4x+3y$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các điểm mút $A(5;4), B(10;2), C(10;9), D(\dfrac{5}{2};9)$	0,5
	Từ đó suy ra $f(x,y)=4x+3y$ nhỏ nhất tại $x=5; y=4$. KL....	0,5

4b (2,0đ)	**Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \dfrac{1}{a^2+2b^2+3} + \dfrac{1}{b^2+2c^2+3} + \dfrac{1}{c^2+2a^2+3}$**	
	Ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + 1 \geq 2b$ $\Rightarrow \dfrac{1}{a^2+2b^2+3} = \dfrac{1}{a^2+b^2+b^2+1+2} \leq \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{ab+b+1}$	0,5
	Tương tự ta có: $\dfrac{1}{b^2+2c^2+3} \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{bc+c+1}, \dfrac{1}{c^2+2a^2+3} \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{ca+a+1}$	0,5
	$\Rightarrow P \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{ab+b+1} + \dfrac{1}{bc+c+1} + \dfrac{1}{ca+a+1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{ab+b+1} + \dfrac{ab}{b+1+ab} + \dfrac{b}{1+ab+b}\right) =$	0,5
	Vậy max $P = \dfrac{1}{2}$ khi $a = b = c = 1$.	0,5